Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 4
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

17. Es sei G ein dreiecksfreier Graph auf n Ecken mit mindestens $n^2/5$ Kanten.

    Man beweise, dass G durch das Löschen von höchstens $n^2/25$ Kanten bipartit gemacht werden kann.

18. Es sei G ein Graph mit n Ecken und $\delta(G) > \frac{2}{7}n$, der weder ein Dreieck noch einen Kreis der Länge 5 enthält. Man beweise, dass G bipartit ist.

19. Man bestimme alle extremalen Graphen zum Satz von Andrásfai, Erdős und Sós. Genauer gesagt bestimme man zu gegebenem $r \geqslant 2$ alle K_{r+1}-freien Graphen auf n Ecken, die zwar $\delta(G) \geqslant \frac{3r-4}{3r-1}n$ erfüllen, aber nicht r-partit sind.

20. Es sei G ein kantenmaximaler dreiecksfreier Graph auf n Ecken mit $\delta(G) > \frac{3}{8}n$.

    (a) Man beweise, dass G entweder bipartit ist oder einen Kreis der Länge 5 enthält.

    (b) Man zeige, dass G keinen Kreis der Länge 8 mit mindestens zwei Hauptdiagonalen enthält.

    (c) Man konstruiere einen Homomorphismus von G nach C_5.

21. Es seien $n \geqslant r \geqslant 3$ ganze Zahlen und G ein Graph mit n Ecken, der mehr als $\frac{1}{2}(r-1)(n-1)$ Kanten besitzt. Man beweise, dass G einen Kreis enthält, dessen Länge mindestens r beträgt.

22. Für eine natürliche Zahl $t \geqslant 3$ sei $K_t^{(3)}$ der vollständige 3-uniforme Hypergraph auf t Ecken und $\pi\big(K_t^{(3)}\big)$ seine Turándichte. Man beweise, dass

    $$\pi\big(K_{2r+1}^{(3)}\big) \geqslant 1 - \tfrac{1}{r^2}$$

    für alle ganzen $r \geqslant 1$ gilt.

- Abgabe von Aufgabe 20 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 5. Dezember vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 12–16 bis Freitag den 6. Dezember, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 6. Dezember, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

17. Im Beweis des Satzes 3.1 kann man sich mehr anstrengen.

18. Was weiß man, wenn G nicht bipartit ist?

19. Man mache den Beweis von Satz 3.2 nochmal.

20. (a) Aufgabe 18 (b) Was macht man, wenn alle vier Hauptdiagonalen vorhanden sind? Wie nutzt man evtl. abwesende Hauptdiagonalen? (c) Basteln!

21. Induktion nach n.

22. Um geeignete Hypergraphen zu bauen, starte man mit einer Partition der Eckenmenge in r gleich große Teile.